CINEMÁTICA

INTRODUCCIÓN. MAGNITUDES DEL MOVIMIENTO.

Definición: La cinemática (Cine=movimiento, mática=estudio) es la parte de la física que estudia el movimiento (cambio físico, no cambian las sustancias, solo la posición, no vamos a tener en cuenta las causas que producen los movimientos) y todas sus clases.

- **Tiempo**

  Para todo cambio es necesario que transcurra el tiempo, todos los cambios físicos se van a referir a un instante inicial (0) y a un instante final (1).

  La unidad en el SI es el segundo (seg). El cambio se va a producir en el tiempo que va del (0) al (1) y se calcula mediante $\Delta t = t_1 - t_0$.

- **Trayectoria y desplazamiento**

  La **trayectoria** es el “camino” recorrido por el objeto al moverse. El **desplazamiento** es la línea recta que une el punto inicial y el punto final de la trayectoria (representa la mínima distancia entre ambos puntos). Se mide en metros (m).

  El **desplazamiento** se puede representar como un vector que una el origen y el final de la trayectoria.

- **Posición y distancia**

  La **posición** de un móvil es el punto que ocupa en la trayectoria en un momento determinado.

  La **Distancia recorrida** se calcula restando las posiciones final e inicial del móvil en dicho intervalo de tiempo ($\Delta s = s_1 - s_0$).

- **Velocidad**

La **Velocidad** de un móvil representa la rapidez con que este cambia de posición. Son los metros recorridos en un intervalo de tiempo.

La unidad de medida de la velocidad en el SI son los metros por segundo **($^{m}/_{s}$)**

Se calcula con la siguiente fórmula: $\mathrm{v} = \frac{\text{Distancia recorrida (m)}}{\text{Tiempo empleado (segundos)}}$

  - **Velocidad media y velocidad instantánea**

    La velocidad media es la media de las velocidades durante el tiempo que dura el movimiento. Se calcula por la siguiente fórmula:

$$\mathrm{v}_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

- **Aceleración**

La **aceleración** de un móvil representa la rapidez con que varía su velocidad. Los cambios de la velocidad están relacionados con aceleraciones (bien de aumento, conocida por aceleración, o bien de reducción, frenada). Estudiaremos ambos casos.

El cálculo de la aceleración se realiza dividiendo el incremento de velocidad entre el intervalo de tiempo transcurrido.

$$\mathrm{a} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_0}{\mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_0}$$

La unidad de medida en el SI es el metro por segundo al cuadrado **($^{m}/_{s^2}$).**

MOVIMIENTOS EN 1 DIMENSIÓN Y SU ESTUDIO

—Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Partiendo de la fórmula de la velocidad $\mathrm{v} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$ se obtiene otra para calcular la posición en cualquier instante.

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta t \cdot \mathrm{v} = \Delta s \;\Rightarrow\; (t_1 - t_0) \cdot \mathrm{v} = (s_1 - s_0)\;;\ \text{si } t_0 = 0 \;\Rightarrow\; s_1 = s_0 + \mathrm{v}t$$

Esta es la ecuación del **MRU**. Las cualidades de este movimiento son:

v = constante   a = 0

—Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)

Un móvil se desplaza con **MRUA** si sigue una trayectoria rectilínea y su aceleración es **constante y no nula**. (Si fuese nula, estaríamos trabajando con MRU). Si la aceleración es positiva (+), la velocidad aumenta; si la aceleración es negativa (-), la velocidad disminuye.

Ecuaciones del MRUA:

1. **Ecuación velocidad – tiempo**. — Se deduce a partir de la definición de aceleración suponiendo que el tiempo inicial es ($t_0 = 0$).

$$a = \frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_0}{t_1 - t_0} \;\Rightarrow\; a = \frac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_0}{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_0 = a \cdot t \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_0 + a \cdot t$$

Esta ecuación permite **calcular la velocidad en cualquier instante**.

2. **Ecuación posición – tiempo**. — Se deduce a partir de la expresión de la velocidad media suponiendo que el tiempo inicial es ($t_0 = 0$)

$$\mathrm{v}_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_m = \frac{s_1 - s_0}{t}$$

La $\mathbf{v_m}$ en el **MRUA** coincide con la media de las velocidades inicial y final.

$$\mathrm{v}_m = \frac{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_0}{2}$$

Igualamos expresiones:

$$\frac{s_1 - s_0}{t} = \frac{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_0}{2}$$

Sabiendo que $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_0 + a \cdot t$ sustituimos y despejamos s_1.

$$\frac{s_1 - s_0}{t} = \frac{2\mathrm{v}_0 + a \cdot t}{2} \;\Rightarrow\; \frac{s_1 - s_0}{t} = \mathrm{v}_0 + \frac{1}{2} a \cdot t \;\Rightarrow\; s_1 - s_0 = \mathrm{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$s_1 = s_0 + \mathrm{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Esta expresión nos permite **calcular la posición en cualquier instante.**

3. **Ecuación velocidad – posición**. — Se obtiene despejando el término “t” de la ecuación de velocidad – tiempo y sustituyéndolo en la ecuación posición – tiempo, quedando la siguiente expresión:

$$\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_0^2 = 2a(x_1 - x_0)$$

— Movimiento Vertical (caso particular de MRUA)

Un cuerpo, al caer, describe un **MRUA** afectado por la aceleración constante de la gravedad. Para estudiar estos movimientos se toma como sistema de referencia el suelo y como sentido positivo el que se dirige hacia arriba. Se distinguen:

Lanzamiento vertical hacia abajo. — La velocidad es negativa. (V = -)

Lanzamiento vertical hacia arriba. — La velocidad es positiva. (V = +)

Caída libre. — No hay velocidad inicial ($V_0 = 0$)

Para calcular la **velocidad** y la **posición** en este movimiento se usan las ecuaciones del **MRUA** sustituyendo **a = -g = -9’8 $^{m}/_{s^2}$**. En forma de vector a = (0,-9’8)

MOVIMIENTOS CIRCULARES O PERIÓDICOS

Un movimiento periódico es el que se repite en el tiempo, la velocidad que llevan es constante durante todo el **PERIODO (T)**, es decir, el tiempo que se tarda en dar una vuelta (o ciclo).

— Movimiento Circular Uniforme (MCU)

En este movimiento se utilizan dos magnitudes para calcular la **velocidad**, velocidad lineal (vista en los MRU) y **velocidad angular.**

Velocidad angular (ω)

Es el cociente entre el ángulo girado y el intervalo de tiempo utilizado para ello.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\text{ángulo girado}}{\text{tiempo empleado}}$$

La unidad en el SI es el radian al segundo (**$^{rad}/_{s}$**).

La relación entre ambas velocidades es:

$$\Delta s = \Delta\varphi \cdot r$$

Al dividir esta expresión por Δt se obtiene que la velocidad lineal es igual a la velocidad angular por el radio de la circunferencia que describe la trayectoria.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot r \quad \Rightarrow \quad v = \omega \cdot r$$

Donde *r* = radio de la circunferencia descrita en la trayectoria.

Ecuación del MCU

Se deduce de la expresión de la velocidad angular.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t_1 - t_0}$$

Comenzando a contar desde $t_0 = 0$.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \omega \cdot \Delta t = \Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \omega \cdot t = \varphi_1 - \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

Esta ecuación nos sirve para **calcular el valor del ángulo girado en cualquier instante**.

* **Radián**

El **radián** es el ángulo al que le corresponde un arco de la misma longitud que el radio. En un giro de una circunferencia se recorren **360^0 = 2πr** que es la longitud de la circunferencia. Al realizar un giro hay infinitas **v** pero solo una **ω** porque hay infinitos puntos entre el borde y el centro pero un único ángulo.

— Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUA)

En todo movimiento curvilíneo, para que describa un giro tenemos que obligar al objeto, esto se consigue mediante una fuerza. Todas las fuerzas generan una aceleración, en el caso de los movimientos circulares, se le llama **aceleración normal o centrípeta (a_n)**. Esta aceleración no hace variar la velocidad, se emplea para cambiar la dirección del móvil en cada instante. El valor de esta aceleración es:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = r \cdot \omega^2 \text{ su unidad es el } {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{seg}^2}$$

Además de la **aceleración normal** en los movimientos circulares nos encontramos con la **aceleración angular (α)** que es la equivalente a la aceleración de los movimientos rectilíneos.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t_0} \text{ unidad } {}^{rad}/_{seg^2} \text{ o } seg^{-2} \text{ ya que el radian es adimensional}$$

Ecuaciones del MCUA

1. **Ecuación velocidad – tiempo**. — Siguiendo el mismo razonamiento que para el MRUA, deducimos la siguiente ecuación suponiendo que $t_0 = 0$ y sabiendo que $\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t_0}$

$$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} \Rightarrow \alpha \cdot t = \omega_1 - \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Esta ecuación nos permite **calcular la velocidad angular en cada instante**.

2. **Ecuación posición – tiempo**. — Procediendo de la misma forma que en el caso del MRUA, deducimos la siguiente ecuación:

Sabiendo que la velocidad angular media (ω_m) es igual a:

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} \quad \text{y} \quad \omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t_1 - t_0}$$

Y suponiendo que $t_0 = 0$, igualamos ambas expresiones y calculamos:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t} = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} \quad (\text{sustituimos } \omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot t)$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t} = \frac{2 \cdot \omega_0 + \alpha \cdot t}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t} = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Esta ecuación nos permite **calcular el ángulo girado en cada instante.**

3. **Ecuación velocidad – posición**. — Como en el caso del MRUA, en los movimientos circulares también existe una relación entre la velocidad y la posición del móvil. Procediendo de igual forma que en el MRUA, despejamos "t" de la ecuación velocidad – tiempo y sustituimos en la ecuación posición – tiempo para obtener:

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi_1 - \varphi_0)$$

MOVIMIENTOS EN 2 DIMENSIONES

Los movimientos estudiados hasta ahora se limitan a una sola dimensión, normalmente se utilizará el "eje x" si nos movemos en horizontal y el "eje y" si se trata de un movimiento vertical. Sin embargo, los movimientos no se reducen al cambio de posición en una sola dimensión sino que se suelen estudiar en dos dimensiones.

Partiendo de las ecuaciones vistas en los **movimientos rectilíneos** y sabiendo que las magnitudes de **velocidad**, **aceleración** y **posición** se pueden representar como vectores [$\vec{\mathrm{v}}$ = (v_x , v_y) ; $\vec{\mathrm{a}}$ = (a_x , a_y) ; $\vec{s}$ = (x , y)] deducimos las ecuaciones a utilizar para cada una de las dimensiones:

— MRU

$$x_1 = x_0 + \mathrm{v}t \qquad y_1 = y_0 + \mathrm{v}t$$

—MRUA

1. Ecuaciones velocidad – tiempo

$$\mathrm{v}_{x_1} = \mathrm{v}_{x_0} + a \cdot t \qquad \mathrm{v}_{y_1} = \mathrm{v}_{y_0} + a \cdot t$$

2. Ecuaciones posición – tiempo

$$x_1 = x_0 + \mathrm{v}_{x_0} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

$$y_1 = y_0 + \mathrm{v}_{y_0} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2$$

Estos dos movimientos se estudiarían como si viésemos al móvil moverse desde arriba.

De forma particular, los movimientos en dos dimensiones que se suelen estudiar son los de **lanzamiento horizontal** y **lanzamiento parabólico** que pasamos a estudiar a continuación.

—Lanzamiento Horizontal

Se produce un **lanzamiento horizontal** cuando el <u>ángulo (α) formado por el vector velocidad ($\vec{\mathrm{v}}$) con la horizontal es nulo (α = 0).</u>

Sabiendo que sobre el móvil actúa el vector aceleración $\vec{\mathrm{a}} = (0\,, -g)$ la **velocidad** variará desde la posición inicial (0) hasta que el móvil quede en reposo respondiendo a la ecuación siguiente: (ver la equivalencia con la ecuación del MRUA)

$$\vec{\mathrm{v}_\mathrm{t}} = \vec{\mathrm{v}_0} + \vec{\mathrm{a}}t \qquad \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_0 + at$$

Quedando el vector velocidad de la forma $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{cte}\,, -gt)$

De igual modo, la **posición del móvil** responde a una variación similar a la expresada con la ecuación posición – tiempo del MRUA, veámoslo:

$$x_1 = x_0 + \mathrm{v}_{x_0} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 \text{ siendo } x_0 = 0 \; y \; a_x = 0 \text{ nos queda } \; x = \mathrm{v}_x t$$

$$y_1 = y_0 + \mathrm{v}_{y_0} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \text{ siendo } \mathrm{v}_{y_0} = 0 \; y \; a_y = -g \text{ nos queda } \; y_1 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Se mantiene el valor de "y_0" ya que si este fuese cero se trataría de un movimiento en una dimensión o el resultado nos daría un valor negativo, y no existe una distancia negativa.

Para calcular el valor de la velocidad en cada instante basta con calcular las componentes del vector velocidad en cada instante y aplicar

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_\mathrm{x}^2 + \mathrm{v}_\mathrm{y}^2}$$

Si lo que deseamos es representar la trayectoria del móvil, la **ecuación de la trayectoria** la obtenemos despejando "t" de la ecuación de la componente "x" de la posición y sustituyendo en la ecuación de la componente "y" de la posición.

$$x = \mathrm{v}_x t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{\mathrm{v}_\mathrm{x}} \text{ sustituyendo en } y_1 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow\; y_1 = y_0 - \frac{g}{2\mathrm{v}_\mathrm{x}^2} \cdot x^2$$

— Lanzamiento Parabólico

Este movimiento es muy similar al **lanzamiento horizontal**, se diferencian en que para que se produzca un **lanzamiento parabólico** el ángulo (α) del vector velocidad ($\vec{\mathrm{v}}$) con la horizontal no debe ser nulo (α ≠ 0).

El vector velocidad se debe descomponer en sus componentes "x" e "y"

$$\mathrm{v}_{x_0} = \mathrm{v}_0 \cdot \cos\alpha \qquad \mathrm{v}_{y_0} = \mathrm{v}_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Conocidas las componentes del vector velocidad inicial, esta magnitud varía en función de la ecuación descrita antes ($\vec{\mathrm{v}_t} = \vec{\mathrm{v}_0} \cdot \vec{a} t$), quedando el vector velocidad general de la siguiente forma:

$$\vec{\mathrm{v}_t} = \left(\mathrm{v}_{x_0}, \mathrm{v}_{y_0} - g t\right)$$

Respecto al lanzamiento horizontal, la posición del móvil solo varía en la ecuación de la coordenada "y" ya que en este caso si existe una "v_{y_0}" quedando la ecuación del siguiente modo:

$$y_1 = y_0 + \mathrm{v}_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para conocer el valor de la velocidad en cada instante se procede del mismo modo que el descrito en el lanzamiento horizontal.

La ecuación de la trayectoria del lanzamiento parabólico también difiere respecto a la ecuación del lanzamiento horizontal, eso es debido a la variación en la ecuación de la coordenada "y". Procediendo del mismo modo se obtiene la siguiente **ecuación de la trayectoria**:

$$x = \mathrm{v}_{x_0} t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{\mathrm{v}_{x_0}} \text{ sustituyendo en } y_1 = y_0 + \mathrm{v}_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y_1 = y_0 + \mathrm{v}_{y_0} \cdot \frac{x}{\mathrm{v}_{x_0}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{\mathrm{v}_{x_0}} \right)^2 \text{ dejandolo en función de } \mathrm{v}_0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y_1 = y_0 + \mathrm{v}_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{x}{\mathrm{v}_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{\mathrm{v}_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y_1 = y_0 + \frac{\mathrm{v}_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\mathrm{v}_0 \cdot \cos \alpha} \cdot x - \frac{g}{2\mathrm{v}_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 \text{ reduciendo la expresión } \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y_1 = y_0 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2\mathrm{v}_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$